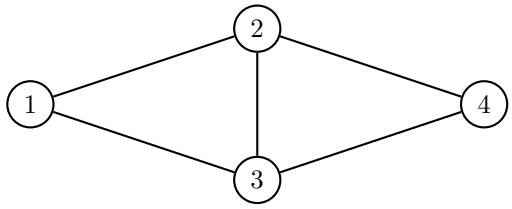
Notion de graphes & Graphes planaires

1) Définitions

Définition Un graphe (non orienté) est constitué d'un ensemble de sommets, reliés par des arêtes.



Remarque Formellement un graphe est la donnée de l'ensemble S de ses sommets, et de l'ensemble A de ses arêtes, chacune étant une paire $\{s_1, s_2\}$ de sommets.

Proposition Soit G un graphe à n sommets, numérotés de 1 à n, et m arêtes. On note d_i le **degré** du sommet i, défini comme le nombre d'arêtes adjacentes au sommet numéro i. On a la relation $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2m$.

2) Chemins et cycles

Définition Dans un graphe non orienté G.

- Un **chemin** d'un sommet s à un sommet s' est une suite de sommets $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = s'$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, s_i et s_{i+1} soient reliés par une arête.
- Le graphe G est dit **connexe** si pour tous sommets s et s', il existe un chemin de s à s'.
- Un **cycle** est un chemin non trivial (de longueur > 0) d'un sommet s à lui-même, dont toutes les arêtes sont distinctes.

Connexité et nombre d'arêtes

Lemme Soit G un graphe non orienté connexe à n sommets, alors G admet au moins $n-1$ arêtes.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommets. Pour un graphe à $n = 1$ sommet, le résultat est évident.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que tout graphe connexe à n sommets admet au moins $n-1$ arêtes.
On considère un graphe G à $n+1$ sommets. On distingue deux cas :

- Si tous les sommets de G sont de degré ≥ 2, alors d'après la relation $\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|$, on a $2|A| \geq 2(n+1)$, donc $|A| \geq n+1$, donc G admet bien au moins $(n+1)-1$ arêtes.
- Sinon, G admet au moins un sommet s de degré ≤ 1, et comme G est connexe (et que $n+1 \geq 2$) ce sommet est nécessairement de degré 1.
  On considère le graphe G' obtenu en retirant à G le sommet s et l'arête associée. Le graphe G' reste connexe, et admet n sommets. D'après l'hypothèse de récurrence, G' admet au moins $n-1$ arêtes, donc G admet au moins n arêtes, d'où le résultat. □

Démonstration. On choisit un sommet quelconque s_0 de G. Comme G est connexe, pour tout sommet s de G, il existe un chemin reliant s à s_0. On note $d(s, s_0)$ la distance de s à s_0 dans le graphe, c'est-à-dire la longueur d'un chemin de longueur minimale reliant s à s_0.
À chaque sommet s de G différent de s_0, on va associer une arête du graphe, de la manière suivante : si s à une distance $k \in \mathbb{N}^*$ de s_0, on lui associe une arête qui le relie à un sommet s' qui est à une distance $k-1$ de s_0. Autrement dit, à $s \neq s_0$, on associe la première arête dans un chemin de longueur minimale reliant s à s_0.
Cette association est nécessairement injective, au sens où les arêtes associés à deux sommets distincts sont elles-mêmes distinctes.
Comme G admet $n-1$ sommets différents de s_0, le nombre d'arêtes de G est bien $\geq n-1$. □

Remarque Cette deuxième démonstration permet de justifier la propriété suivante :

Propriété Si G est un graphe connexe à n sommets, il est possible de ne garder que $n-1$ arêtes, tout en préservant la connexité. Autrement dit, tout graphe connexe à n sommets peut-être obtenu en ajoutant des arêtes à un graphe initial connexe à $n-1$ arêtes (sur les mêmes n sommets).

Existence de cycles

Lemme Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degrés ≥ 2. Alors G admet un cycle.

Démonstration. Soit $s = s_0$ un sommet initial quelconque de G. On construit une suite de sommets de G par récurrence.
Comme $d(s_0) \geq 2$, s_0 admet deux voisins. On en choisit un, que l'on note s_1, puis à chaque étape, après avoir choisi s_n on définit s_{n+1} comme un voisin de s_n qui est différent de s_{n-1} (ce qui est possible car $d(s_n) \geq 2$).
On s'arrête lorsque l'on retombe sur un sommet déjà visité, autrement dit quand s_{n+1} est égal à un des sommets $s_0, \ldots, s_{n-2}$ que l'on note s_i. On a alors trouvé un cycle

$$s_i \to s_{i+1} \to \ldots \to s_{n-1} \to s_n \to s_i \quad \square$$

Proposition Soit G connexe à n sommets. On a l'équivalence entre

(i) G n'a pas de cycle.

(ii) G admet exactement $n-1$ arêtes.

Un graphe connexe vérifiant ces assertions est appelé un **arbre**.

Démonstration. Comme G est connexe, on sait qu'il admet au moins $n-1$ arêtes.

$(ii) \Rightarrow (i)$: par contraposée, si le graphe G admet un cycle, en retirant n'importe quelle arête du cycle, on préserve la connexité de G, et le graphe obtenu doit donc avoir au moins $n-1$ arêtes. C'est donc que G admet au moins n arêtes.

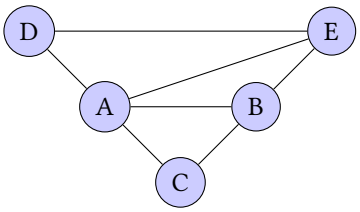
$(i) \Rightarrow (ii)$: par récurrence : D'après le lemme précédent, si G n'a pas de cycle, il admet un sommet s de degré ≤ 1, donc par connexité, $d(s) = 1$. En retirant ce sommet (et son arête), on obtient un graphe G' à $n-1$ sommets qui est connexe, et sans cycle. Par hypothèse de récurrence, G' admet exactement $n-2$ arêtes, donc G admet exactement $n-1$ arêtes. □

Graphes planaires

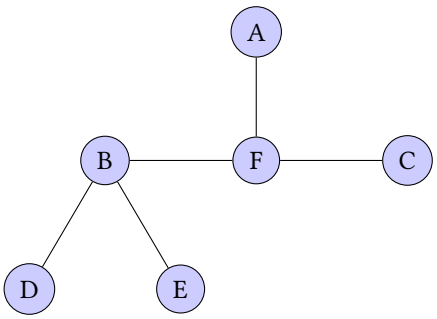
Définition Un graphe est dit **planaire** si on peut le dessiner dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent.

Un dessin d'un graphe planaire définit des **faces**, qui sont les régions du plan délimitées par les arêtes, y compris une face infinie qui correspond à toute la région « extérieure » au dessin du graphe.

Un dessin planaire avec 4 faces



Un arbre, avec une unique face



Formule d'Euler

Proposition – Formule d'Euler. Étant donné un dessin d'un graphe planaire connexe, on note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces. Ces trois nombres sont reliés par la relation $s - a + f = 2$.

Démonstration. Commençons par remarquer que chaque face bornée (c'est-à-dire autre que la face infinie) est délimitée par des arêtes qui forment un cycle du graphe.

Fixons $s \in \mathbb{N}^*$ le nombre de sommets. On procède par récurrence sur le nombre d'arêtes d'un tel dessin.

Par connexité, on a nécessairement $a \geq s-1$. Si $a = s-1$, le graphe est un arbre et, d'après la proposition précédente, il n'admet aucun cycle, donc aucune face bornée. On a donc $f = 1$ et la relation $s - a + f = 2$ est bien vérifiée.

On suppose la formule d'Euler vérifiée pour un nombre d'arêtes $a \geq s-1$ donné. On considère un dessin planaire avec $a+1$ arêtes. Comme $a + 1 > s - 1$, d'après la proposition précédente, le graphe admet au moins un cycle. On considère une arête d'un tel cycle que l'on va retirer.

Comme l'arête appartient à un cycle, elle est adjacente à deux faces distinctes (l'une étant « à l'intérieur » du cycle et l'autre à l'extérieur). En retirant cette arête, on diminue donc le nombre de faces du dessin d'une unité. Par ailleurs, comme l'arête appartient à un cycle, sa suppression préserve la connexité du graphe.

Le dessin obtenu en retirant cette arête relève donc de l'hypothèse de récurrence et vérifie la relation d'Euler. On en déduit que le dessin d'origine la vérifie également (on ajoute une arête et une face). □

Remarque La formule d'Euler est encore valable pour un graphe dessiné sur une sphère.

Corollaire Si $s \geq 3$, alors $a \leq 3s - 6$.

Démonstration. On a l'inégalité $3f \leq 2a$, qui vient du fait que chaque face est bordée par au moins trois arêtes et que chaque arête côtoie au plus deux faces.

(Formellement, si on note N le nombre de couples (arête, face) qui se côtoient, on a $2a \geq N \geq 3f$).

On a alors $3(f-a) \leq -a$, c'est-à-dire $3(2-s) \leq -a$, c'est-à-dire $a \leq 3s-6$ □

Corollaire Tout graphe planaire admet un sommet de degré ≤ 5.

Démonstration. Chaque composante connexe d'un graphe G vérifie soit $s \leq 2$ soit $a \leq 3s-6$.

Sur une de ces composantes vérifiant $a \leq 3s-6$, on a $\sum_{s \in S} d(s) = 2a$, donc $\sum_{s \in S} d(s) \leq 6s - 12$.

D'après le principe de la moyenne, un des degrés doit alors être $\leq \frac{6s-12}{s} < 6$. □